VISIT…

LANZAROTE

Caliente.COM

2.3. Vibrații forțate

Forțele dinamice care pot fi aplicate structuri inginereşti au diverse forme. În acest capitol vor fi considerate două clase de încărcări dinamice. Prima intre acestea reprezintă încărcările armonice şi periodice, care pot proveni spre exemplu ca urmare a unor dispozitive rotative amplasate în clădiri. Cea de-a doua categorie de încărcări dinamice sunt cele care variază arbitrar în timp, cele de tip treaptă şi şoc.

2.3.1. Vibrații armonice neamortizate ale sistemelor SGLD

O forță armonică are forma $p(t) = p_0 \sin \omega t$ sau $p(t) = p_0 \cos \omega t$, unde p_0 reprezintă amplitudinea forței perturbatoare, iar ω pulsația acesteia, căreia îi corespunde perioada $T = 2\pi/\omega$ (vezi Figura 2.18a). În cele ce urmează se va prezenta răspunsul unui sistem cu un singur grad de libertate dinamică sub efectul unei încărcări de tip sinus, deoarece răspunsul la o încărcare dinamică de tip cosinus este similară cu aceasta.

Folosind ecuația de mişcare (2.6) pentru cazul unor vibrații neamortizate generate de o forță perturbatoare $p(t) = p_0 \sin \omega t$ obținem:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \qquad (2.40)$$

Deformația *u(t)* a sistemului SGLD poate fi obținut rezolvând ecuația (2.40) pentru condițiile inițiale:

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0) \qquad (2.41)$$

unde $u(0)$ şi $\dot{u}(0)$ sunt deplasarea, respectiv viteza în momentul în care este aplicată forța dinamică *p(t)*. Soluția particulară a ecuației (2.40) este:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad \omega \neq \omega_n \qquad (2.42)$$

Soluția complementară a ecuației (2.40) este:

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \qquad (2.43)$$

soluția completă fiind suma soluției particulare şi a celei complementare:

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \qquad (2.44)$$

Folosind condițiile inițiale (2.41) se obține soluția finală:

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega_n t + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega_n t}_{\text{răspuns tranzitoriu}} + \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t}_{\text{răspuns staționar}} \qquad (2.45)$$

Ecuația (2.45) este reprezentată în Figura 2.18b pentru $\omega/\omega_n = 0.2$, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \omega_n p_o / k$ cu linie continuă. Termenul din ecuația (2.45) care include $\sin \omega t$ reprezintă soluția particulară a ecuației de mişcare (2.40) şi este reprezentată cu linie întreruptă.

Pe baza ecuației (2.45) şi folosind Figura 2.18b se poate observa că deplasarea *u(t)* are două componente distincte de vibrație:

- termenul conținând $\sin \omega t$ care defineşte o mişcare oscilatorie cu frecvența perturbatoare
- termenii conținând $\cos \omega_n t$ şi $\sin \omega_n t$ care definesc o mişcare oscilatorie la frecvența proprie de vibrație a sistemului

Prim dintre aceste componente se numeşte **răspuns staționar** sau **forțat**, deoarece acesta se datorează forței dinamice aplicate şi nu este influențat de condițiile inițiale. Cea de-a doua componentă poartă denumirea de **răspuns tranzitoriu**, care depinde de deplasarea şi viteza

iniţială, precum şi de proprietăţile sistemului SGLD şi forţa perturbatoare. Răspunsul tranzitoriu există chiar şi pentru $u(0)=\dot{u}(0)=0$, caz în care ecuaţia (2.45) devine:

$$u(t)=\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) \tag{2.46}$$

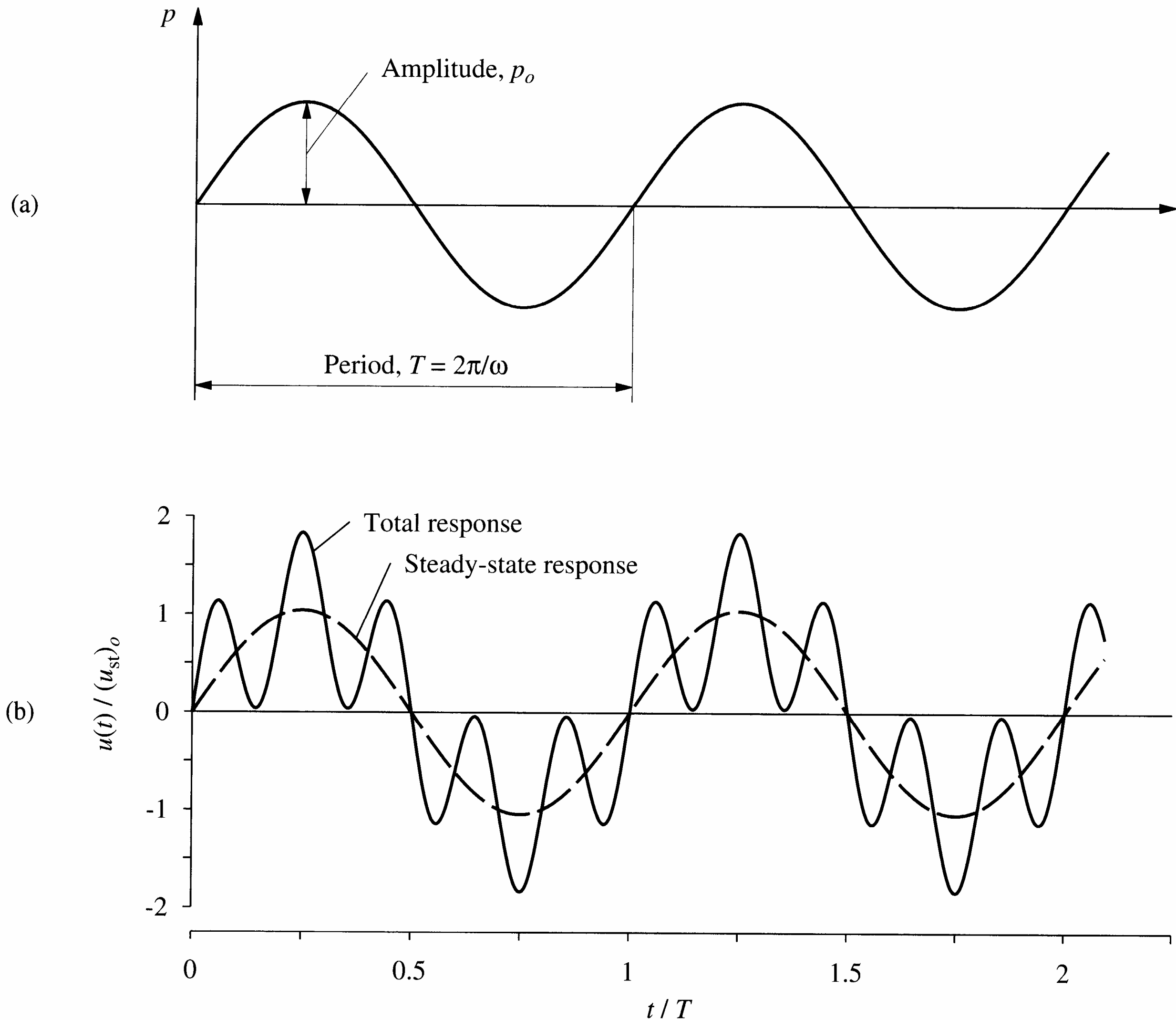


Figura 2.18. Forţa armonică (a); răspunsul unui sistem SGLD sub acţiunea unei forţe armonice pentru $\omega/\omega_n=0.2$, $u(0)=0$, $\dot{u}(0)=\omega_n p_o/k$ (b), Chopra, 2001.

Răspunsul tranzitoriu apare în Figura 2.18 ca deferenţa dintre răspunsul total şi cel staţionar. Acesta continuă la infinit doar în cazul teoretic al vibraţiilor neamortizate, amortizarea prezentă în cazul structurilor reale ducând la diminuarea acestuia cu timpul, motiv din care se numeşte tranzitoriu.

În cazul în care se neglijează efectul dinamic al sistemului SGLD, conţinut în termenul de acceleraţie din ecuaţia (2.40), se obţine deplasarea statică a sistemului în orice moment de timp *t* dat:

$$u_{st}(t)=\frac{p_0}{k}\sin\omega t \tag{2.47}$$

Valoarea maximă a deplasării statice este:

$$\left(u_{st}\right)_0=\frac{p_0}{k} \tag{2.48}$$

care reprezintă deformația maximă a sistemului sub acțiunea unei forțe statice cu valoarea p_0 şi care va fi denumită în continuare **deformația statică**. Folosind această ultimă notație, răspunsul staționar poate fi exprimat ca:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega t \tag{2.49}$$

Factorul din paranteza pătrată a expresiei (2.49) este reprezentat în Figura 2.19 funcție de raportul dintre pulsația perturbatoare şi pulsația proprie de vibrație a sistemului SGLD (ω/ω_n). Pentru $\omega/\omega_n < 1$ sau $\omega < \omega_n$ acest factor este pozitiv, indicând faptul că deplasarea *u(t)* şi forța perturbatoare *p(t)* au acelaşi semn algebric (sistemul se deplasează în acelaşi sens în care acționează forța). În acest caz se spune că deplasarea este **în fază** cu forța perturbatoare. Pentru $\omega/\omega_n > 1$ sau $\omega > \omega_n$ acest factor este negativ, indicând faptul că deplasarea *u(t)* şi forța perturbatoare *p(t)* au semne algebrice opuse (sistemul se deplasează în direcție opusă sensului în care acționează forța). În acest caz deplasarea este **defazată** față de forța perturbatoare.

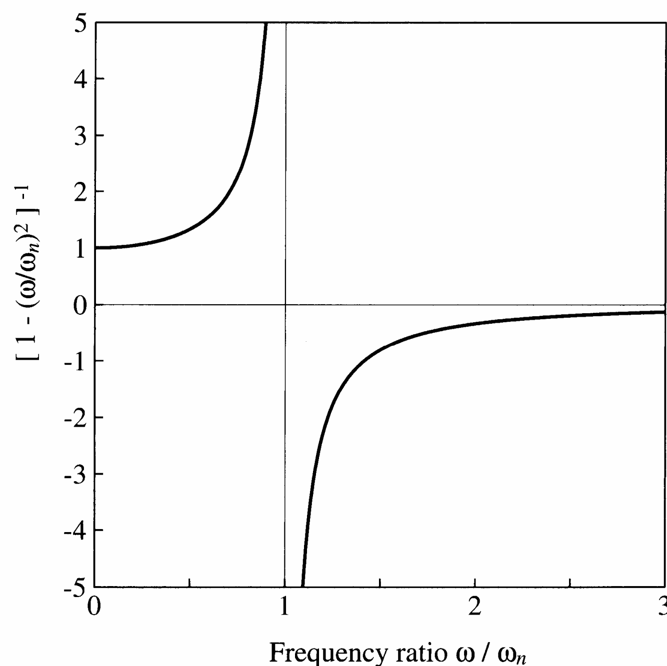


Figura 2.19. Reprezentarea factorului $\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2}$ funcție de raportul ω/ω_n (Chopra, 2001).

Noțiunea de fază poate fi exprimată matematic prin exprimarea relației (2.49) în funcție de amplitudinea u_0 a deplasării *u(t)* şi a **unghiului de fază** ϕ în următoarea formă:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \tag{2.50}$$

unde

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\left|1-(\omega/\omega_n)^2\right|} \quad \text{şi} \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases} \tag{2.51}$$

Pentru $\omega < \omega_n$ unghiul de fază ϕ =0°, indicând faptul că deplasarea *u(t)* variază proporțional cu $\sin \omega t$, în fază cu forța perturbatoare *p(t)*. Pentru $\omega > \omega_n$ unghiul de fază ϕ =180°, indicând faptul că deplasarea *u(t)* variază proporțional cu $-\sin \omega t$, defazat față de forța perturbatoare *p(t)*. Variația unghiului de fază funcție de raportul ω/ω_n este reprezentată în Figura 2.20.

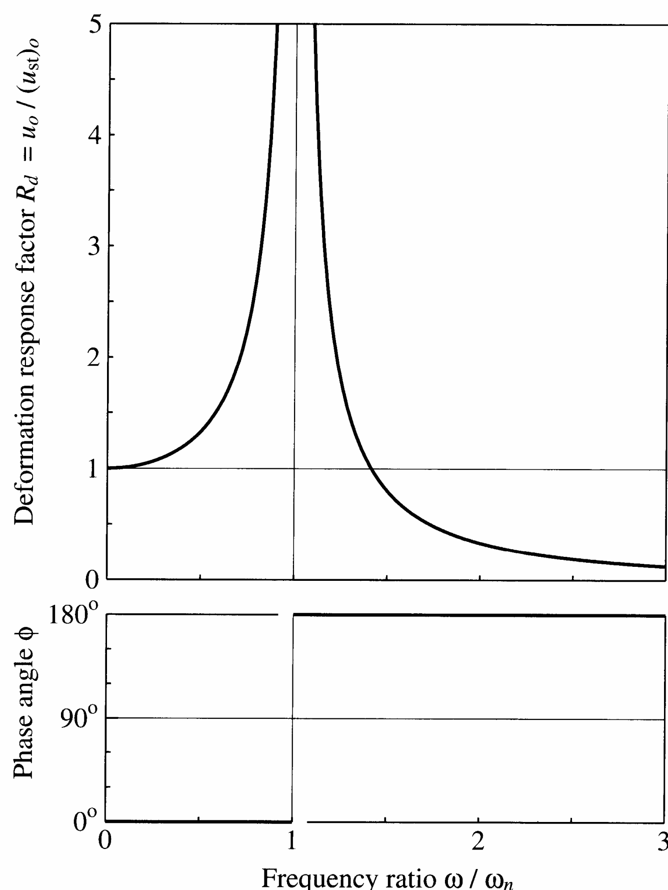


Figura 2.20. Factorul dinamic pentru deplasare şi unghiul de fază pentru un sistem neamortizat excitat de o forță armonică (Chopra, 2001).

Factorul dinamic pentru deplasare R_d este egal cu raportul dintre amplitudinea u_0 a deplasării dinamice (oscilatorii) şi deplasarea statică $(u_{st})_0$. Expresia factorului dinamic pentru deplasare din ecuația (2.51) este prezentată grafic în Figura 2.20 funcție de raportul ω/ω_n şi permite următoarele observații:

- pentru valori mici ale raportului ω/ω_n (forța dinamică variază "lent"), factorul dinamic pentru deplasare R_d este doar cu puțin mai mare decât 1, amplitudinea mişcării dinamice fiind apropiată de deformația statică
- pentru $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ ($\omega > \omega_n\sqrt{2}$), factorul dinamic pentru deplasare R_d < 1, amplitudinea mişcării dinamice fiind mai mică decât deformația statică
- odată cu creşterea raportului ω/ω_n peste $\sqrt{2}$ factorul dinamic pentru deplasare R_d scade, ajungând la valoarea 0 pentru $\omega/\omega_n \to \infty$, ceea ce implică faptul că oscilațiile datorate unei variații foarte rapide ale forței perturbatoare în comparație cu pulsația proprie a sistemului sunt mici
- pentru $\omega/\omega_n \simeq 1$ (ω apropiat de ω_n), factorul dinamic pentru deplasare R_d este cu mult mai mare decât 1, ceea ce înseamnă că amplitudinea mişcării dinamice este mult mai mare decât deformația statică

Pulsația rezonantă reprezintă pulsația forței perturbatoare pentru care factorul dinamic R_d este maxim. În cazul unui sistem neamortizat pulsația rezonantă coincide cu pulsația proprie de vibrație ω_n, iar factorul dinamic pentru deplasare R_d este infinit la această pulsație. Totuşi, mişcarea de oscilație nu devine infinită imediat, ci gradual, după cum se va vedea din cele ce urmează.

Pentru $\omega = \omega_n$ soluția (2.46) a ecuației de mişcare nu mai este valabilă, soluția particulară (2.42) nefiind valabilă deoarece este parte a soluției complementare. În acest caz soluția particulară are forma:

$$u_p(t) = -\frac{p_0}{2k}\omega_n t \cos\omega_n t \quad \omega_n = \omega \tag{2.52}$$

iar soluția completă pentru condiții inițiale de repaus $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ devine:

$$u(t) = -\frac{1}{2}\frac{p_0}{k}\left(\omega_n t \cos\omega_n t - \sin\omega_n t\right) \tag{2.53}$$

sau

$$\frac{u(t)}{\left(u_{st}\right)_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T_n}\cos\frac{2\pi t}{T_n} - \sin\frac{2\pi t}{T_n}\right) \tag{2.54}$$

Această relație este reprezentată grafic în Figura 2.21, de unde se poate observa că timpul în care are loc o oscilație completă este egală cu T_n. Mişcarea oscilatorie *u(t)* are maxime locale pentru $t = \left(j - 1/2\right)T_n$ cu valori de $\pi\left(j - 1/2\right)\left(u_{st}\right)_0$, $j = 1,2,3...$, şi minime locale pentru $t = jT_n$ cu valori de $\pi j\left(u_{st}\right)_0$, $j = 1,2,3...$. În fiecare ciclu de oscilație amplitudinea deplasării creşte cu valoarea:

$$\left|u_{j+1}\right| - \left|u_j\right| = \left(u_{st}\right)_0\left[\pi\left(j+1\right) - \pi j\right] = \left(u_{st}\right)_0 \pi = \frac{p_0}{k}\pi \tag{2.55}$$

Amplitudinea deplasării creşte la infinit, dar aceasta devine infinită doar după un timp infinit.

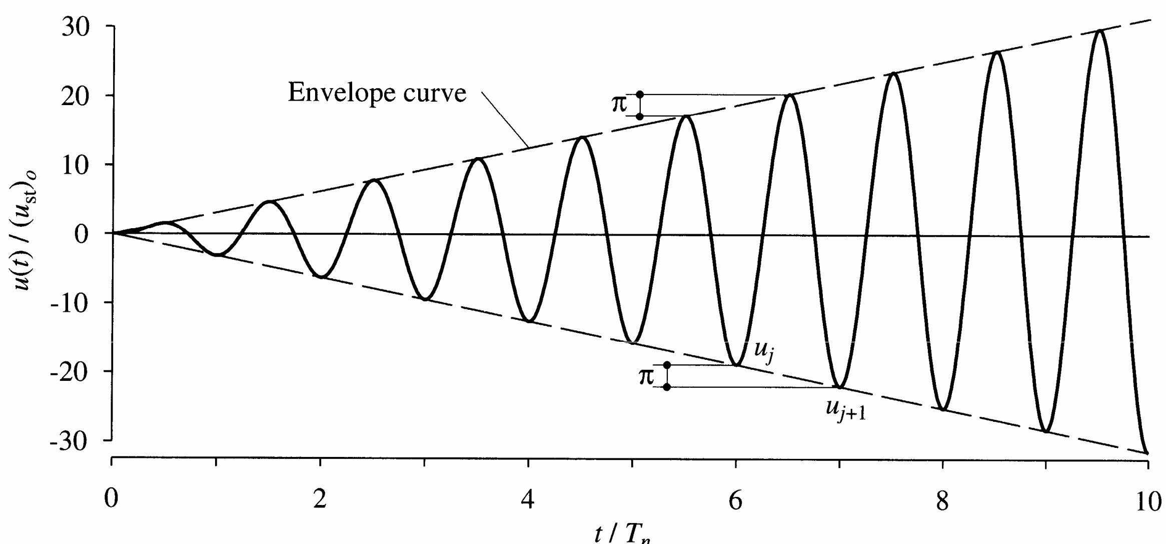


Figura 2.21. Răspunsul unui sistem neamortizat sub acțiunea unei forțe sinusoidale cu frecvența $\omega = \omega_n$, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ (Chopra, 2001).

Creşterea infinită a deformațiilor în cazul sistemelor neamortizate sub acțiunea unei încărcări armonice este teoretică din două motive. În primul rând structurile reale au amortizare intrinsecă, care va limita amplificarea la infinit a deformațiilor. În cel de-al doilea rând, structurile reale nu au un răspuns infinit elastic, astfel încât odată cu creşterea deformațiilor peste o anumită valoare, structura fie va intra în curgere plastică, rigiditatea va scădea şi pulsația proprie nu va mai fi egală cu cea perturbatoare, fie va ceda într-un mod fragil.

2.3.2. Vibrații armonice amortizate ale sistemelor SGLD

Răspunsul staționar şi tranzitoriu

Folosind ecuația de mişcare (2.6) pentru cazul unor vibrații amortizate generate de o forță perturbatoare $p(t) = p_0 \sin \omega t$ obținem:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \tag{2.56}$$

Deformația *u(t)* a sistemului SGLD poate fi obținut rezolvând ecuația (2.56) pentru condițiile inițiale:

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0) \tag{2.57}$$

unde $u(0)$ şi $\dot{u}(0)$ sunt deplasarea, respectiv viteza în momentul în care este aplicată forța dinamică *p(t)*. Soluția particulară a ecuației (2.56) este:

$$u_p(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \tag{2.58}$$

unde

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1-(\omega/\omega_n)^2}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2} \qquad D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\zeta(\omega/\omega_n)}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2} \tag{2.59}$$

Soluția complementară a ecuației (2.56) este identică soluția care caracterizează oscilațiile libere amortizate:

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t\right) \tag{2.60}$$

unde $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Soluția completă a ecuației (2.56) este:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}\left(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t\right)}_{\text{răspuns tranzitoriu}} + \underbrace{C \sin \omega t + D \cos \omega t}_{\text{răspuns staționar}} \tag{2.61}$$

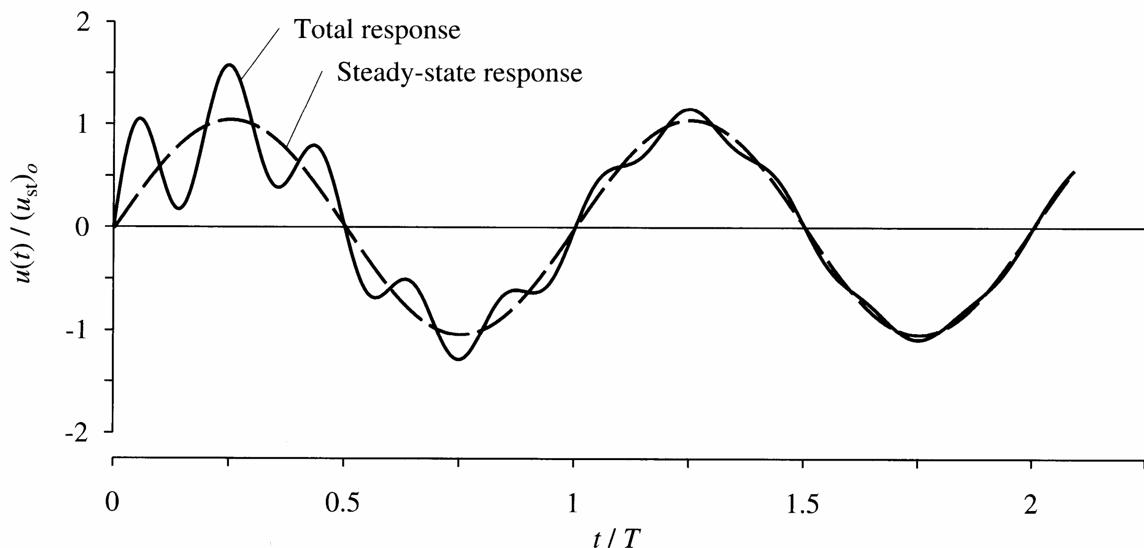


Figura 2.22. Răspunsul unui sistem SGLD amortizat sub acțiunea unei forțe armonice pentru $\omega/\omega_n = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \omega_n p_o / k$ (Chopra, 2001).

Constantele *A* şi *B* de mai sus pot fi determinate folosind condiţiile iniţiale $u(0)$ şi $\dot{u}(0)$. Similar vibraţiilor forţate neamortizate, răspunsul dinamic în cazul unor vibraţii forţate amortizate este compus din două componente: răspunsul **tranzitoriu** şi cel **staţionar** sau forţat.

Ecuaţia (2.61) este reprezentată grafic în Figura 2.22 pentru $\omega/\omega_n = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \omega_n p_o / k$. Răspunsul total este indicat printr-o linie continuă, iar cel staţionar printr-o linie întreruptă. Diferenţa dintre răspunsul total şi cel staţionar este răspunsul tranzitoriu, care scade exponenţial cu timpul cu o rată care depinde de ω/ω_n şi ζ. După un timp răspunsul unui sistem amortizat acţionat de o forţă perturbatoare armonică este guvernat de componenta staţionară. În mare parte din cele ce urmează se va studia doar componenta staţionară a vibraţiilor forţate. Se va avea totuşi în vedere că este posibil ca deformaţia maximă a sistemului să aibă loc înainte ca sistemul să atingă stadiul staţionar.

Răspunsul pentru $\omega=\omega_n$

În continuare se va examina rolul amortizării în reducerea vibraţiilor tranzitorii şi în limitarea vibraţiilor staţionare pentru cazul în care pulsaţia forţei perturbatoare este egală cu pulsaţia proprie a sistemului. Pentru $\omega = \omega_n$ constantele *C* şi *D* din ecuaţia (2.59) devin *C=0* şi $D = -(u_{st})_0 / 2\zeta$. Pentru $\omega = \omega_n$ şi condiţii iniţiale de repaus, constantele *A* şi *B* din ecuaţia (2.61) pot fi determinate a fi $A = (u_{st})_0 / 2\zeta$ şi $B = (u_{st})_0 / 2\sqrt{1-\zeta^2}$. Înlocuind valorile constantelor *A*, *B*, *C* şi *D* în ecuaţia (2.61), aceasta devine:

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_D t \right) - \cos\omega_n t \right] \qquad (2.62)$$

Ecuaţia (2.62) este reprezentată grafic în Figura 2.23 pentru fracţiunea din amortizarea critică $\zeta = 0.05$. Comparând Figura 2.23 cu Figura 2.21 reprezentând cazul vibraţiilor neamortizate se poate observa că amortizarea atenuează mişcarea oscilatorie în fiecare ciclu, limitând răspunsul la valoarea:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \qquad (2.63)$$

Pentru sisteme cu o amortizare mică, termenul conţinând sinus din ecuaţia (2.62) este neglijabil, iar $\omega_D \simeq \omega_n$, astfel încât ecuaţia (2.62) se simplifică la:

$$u(t) \simeq \underbrace{(u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta}\left(e^{-\zeta\omega_n t} - 1 \right)}_{\text{funcţia înfăşurătoare}} \cos\omega_n t \qquad (2.64)$$

Variaţia în timp a deplasării urmăreşte forma dată de funcţia $\cos\omega_n t$, amplitudinea acesteia fiind indicată în Figura 2.23 cu linie întreruptă.

Amplitudinea mişcării staţionare sub acţiunea unei forţe perturbatoare cu pulsaţia $\omega = \omega_n$ şi rata cu care este atinsă starea de mişcare staţionară depinde foarte mult de amortizarea sistemului. Acest fapt se poate observa în Figura 2.24, în care este reprezentată ecuaţia (2.62) pentru trei valori ale ζ : 0.01, 0.05 şi 0.1. Cu cât este mai mică amortizarea, cu atât este mai mare numărul de oscilaţii necesare pentru a atinge o anumită proporţie din amplitudinea mişcării staţionare u_0. De exemplu, numărul de oscilaţii complete necesare pentru a atinge 95% din u_0 este egal cu 48 pentru $\zeta = 0.01$, 24 pentru $\zeta = 0.02$, 10 pentru $\zeta = 0.05$, 5 pentru $\zeta = 0.1$, 2 pentru $\zeta = 0.2$.

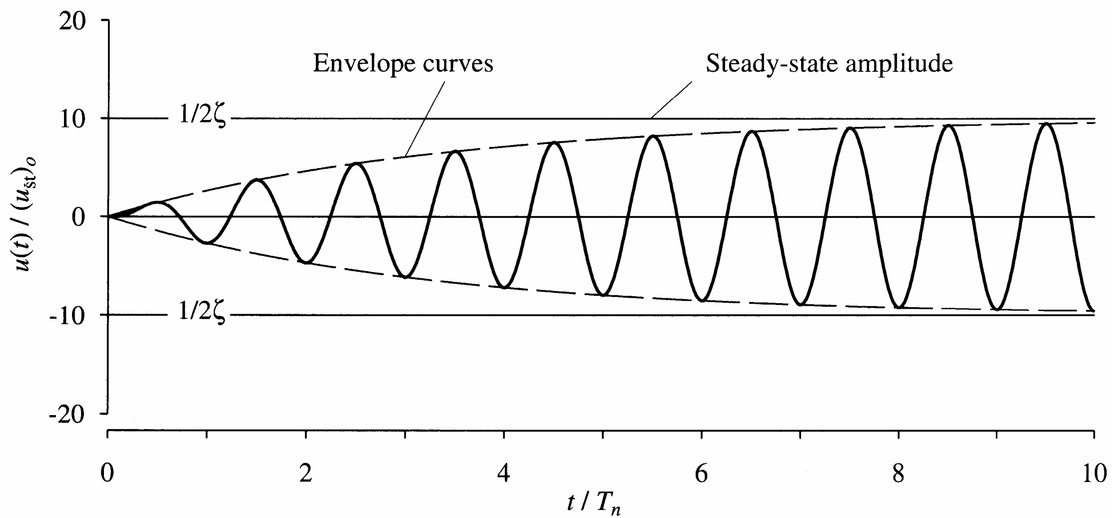


Figura 2.23. Răspunsul unui sistem amortizat cu $\zeta = 0.05$ sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale cu $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ (Chopra, 2001).

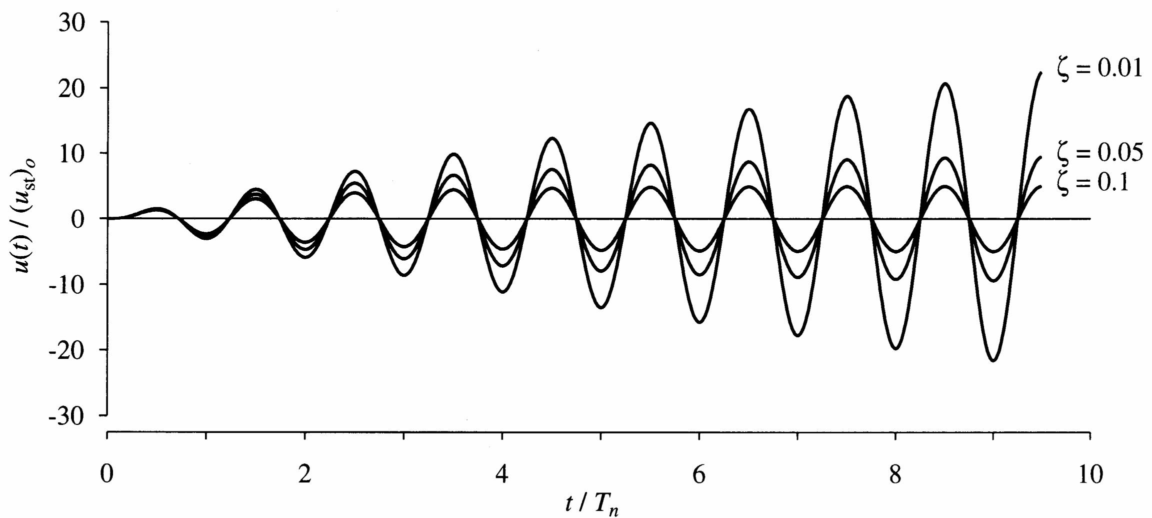


Figura 2.24. Răspunsul a trei sisteme amortizat cu $\zeta =$ 0.01, 0.05 şi 0.1 sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale cu $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ (Chopra, 2001).

Deformația maximă şi unghiul de fază

Deformațiile sistemului în stadiul de vibrații staționare sunt definite de ecuațiile (2.58) şi (2.59), şi pot fi rescrise sub următoare formă:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \tag{2.65}$$

unde $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$ şi $\phi = \tan^{-1}(-D/C)$. Înlocuind valorile *C* şi D, rezultă:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}} \tag{2.66}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} \tag{2.67}$$

Ecuația (2.65) este reprezentată grafic în Figura 2.25 pentru trei valori ale raportului ω/ω_n şi o valoare fixă a amortizării ($\zeta = 0.2$). În această figură sunt indicate valorile R_d şi ϕ, precum şi variația

în timp a deformației statice, care este proporțională cu forța perturbatoare *p(t)*. Mişcarea staționară are aceiaşi perioadă ca şi forța perturbatoare ($T = 2\pi / \omega$), dar cu defazaj de $\phi / 2\pi$.

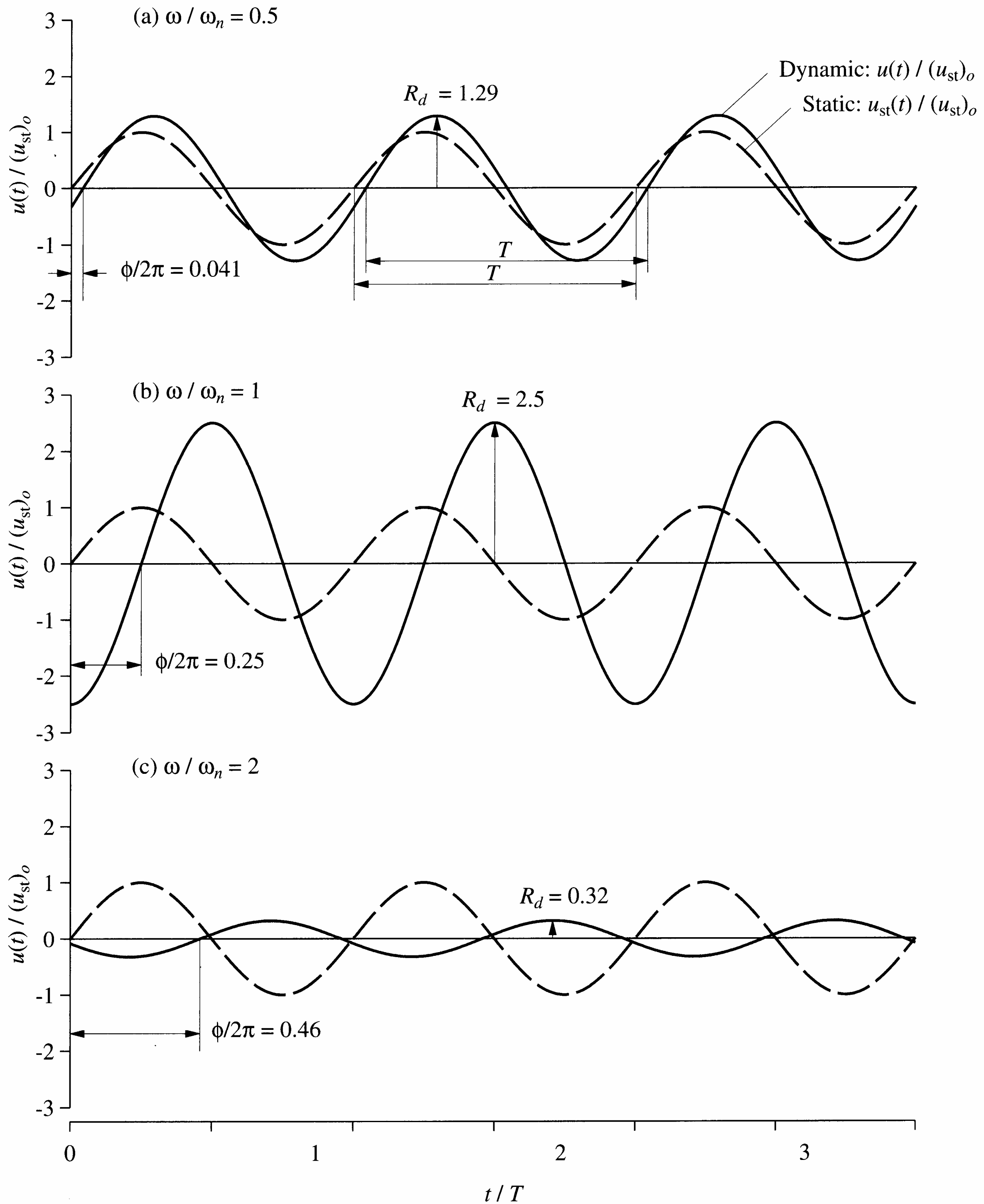


Figura 2.25. Răspunsul staționar al unor sisteme amortizate ($\zeta = 0.2$) sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale cu pulsația: $\omega / \omega_n = 0.5$ (a), $\omega / \omega_n = 1$ (b), $\omega / \omega_n = 2$ (c), Chopra, 2001.

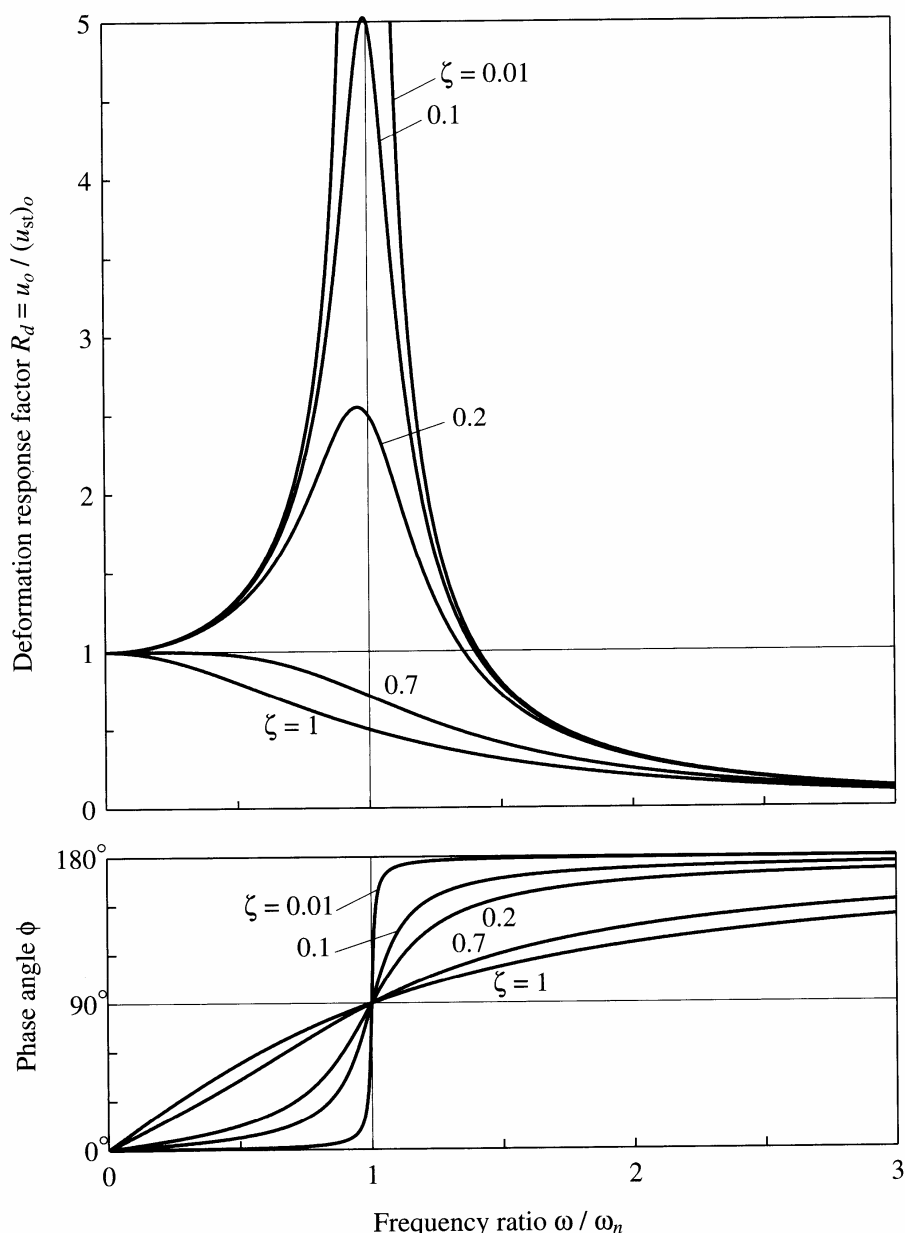


Figura 2.26. Factorul dinamic pentru deplasări şi unghiul de fază pentru un sistem amortizat excitat de o forţă perturbatoare armonică (Chopra, 2001).

În Figura 2.26 este prezentat factorul dinamic pentru deplasare funcţie de ω/ω_n pentru câteva valori ale fracţiunii din amortizarea critică ζ. Comparând o reprezentare similară a factorului dinamic pentru cazul vibraţiilor neamortizate din Figura 2.20, se poate observa că amortizarea reduce factorul R_d, şi în consecinţă şi amplitudinea mişcării pentru toate pulsaţiile ale forţei perturbatoare. Această reducere este într-o strânsă legătură cu pulsaţia forţei perturbatoare, fiind examinată mai jos pentru trei regiuni ale scării de pulsaţie:

- Pentru valori ale raportului $\omega/\omega_n \ll 1$ ($T \gg T_n$, adică forţa dinamică variază "lent"), factorul dinamic pentru deplasare R_d este doar cu puţin mai mare decât 1, amplitudinea mişcării dinamice fiind apropiată de deformaţia statică şi fiind quasi-independentă de valoarea amortizării. Astfel,

$$u_0 \cong (u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \tag{2.68}$$

Acest rezultat implică faptul că răspunsul dinamic este foarte apropiat de cel static şi este guvernat de rigiditatea sistemului.

- Pentru $\omega/\omega_n \gg 1$ ($T \ll T_n$, adică forța dinamică variază "repede"), factorul dinamic pentru deplasare R_d tinde către zero odată cu creşterea raportului ω/ω_n şi este puțin afectat de valoarea amortizării. Pentru valori ridicate ale raportului ω/ω_n, termenul $(\omega/\omega_n)^4$ domină ecuația (2.66), care poate fi aproximată cu:

$$u_0 \cong (u_{st})_0 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{m\omega^2} \quad (2.69)$$

  ceea ce implică faptul că răspunsul este controlat de masa sistemului.
- Pentru $\omega/\omega_n \simeq 1$ (pulsația forței perturbatoare este apropiată de pulsația proprie de vibrație a sistemului), factorul dinamic pentru deplasare R_d este sensibil la valoarea amortizării, şi pentru valori mici ale amortizării poate fi mult mai mare decât 1, ceea ce înseamnă că amplitudinea mişcării dinamice poate fi mult mai mare decât deformația statică. Pentru $\omega/\omega_n = 1$ ecuația (2.66) devine:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n} \quad (2.70)$$

  ceea ce implică faptul că amplitudinea mişcării este controlată de amortizarea sistemului.

Unghiul de fază ϕ, care indică defazajul în timpul dintre răspunsul sistemului şi forța perturbatoare variază cu raportul ω/ω_n şi este reprezentat grafic în Figura 2.26. Valoarea acestuia este examinată mai jos pentru aceleaşi trei regiuni ale domeniul de valori ω/ω_n:

- Pentru valori ale raportului $\omega/\omega_n \ll 1$ (forța dinamică variază "lent"), unghiul de fază ϕ este apropiat de 0°, deplasarea sistemului fiind aproximativ în fază cu forța perturbatoare, ca în Figura 2.25a. Deplasarea sistemului şi forța perturbatoare au acelaşi sens.
- Pentru $\omega/\omega_n \gg 1$ (forța dinamică variază "repede"), unghiul de fază ϕ este apropiat de 180°, deplasarea sistemului fiind în esență defazată de forța perturbatoare, ca în Figura 2.25c. Deplasarea sistemului şi forța perturbatoare au sensuri opuse.
- Pentru $\omega/\omega_n \simeq 1$ (pulsația forței perturbatoare este apropiată de pulsația proprie de vibrație a sistemului), unghiul de fază ϕ are valoarea de 90° pentru orice valoare a lui ζ, deplasarea sistemului având un maximum la trecerea forței prin valoarea 0, situație exemplificată în Figura 2.25b.

Factorii dinamici

Ecuația (2.65) reprezentând răspunsul staționar al unui sistem amortizat sub acțiunea unei forțe perturbatoare armonice poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (2.71)$$

Factorul dinamic pentru deplasare R_d este egal cu raportul dintre amplitudinea u_0 a deplasării dinamice (oscilatorii) şi deplasarea statică $(u_{st})_0$ şi este dat de ecuația (2.66).

Derivând ecuația (2.71) în raport cu timpul obținem următoarea relație:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \quad (2.72)$$

unde R_v este **factorul dinamic pentru viteză** şi care este raportat la R_d prin ecuația:

$$R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \quad (2.73)$$

Derivând ecuația (2.72) în raport cu timpul obținem următoarea relație:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi) \tag{2.74}$$

unde R_a este **factorul dinamic pentru accelerație** şi care este raportat la R_d prin ecuația:

$$R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \tag{2.75}$$

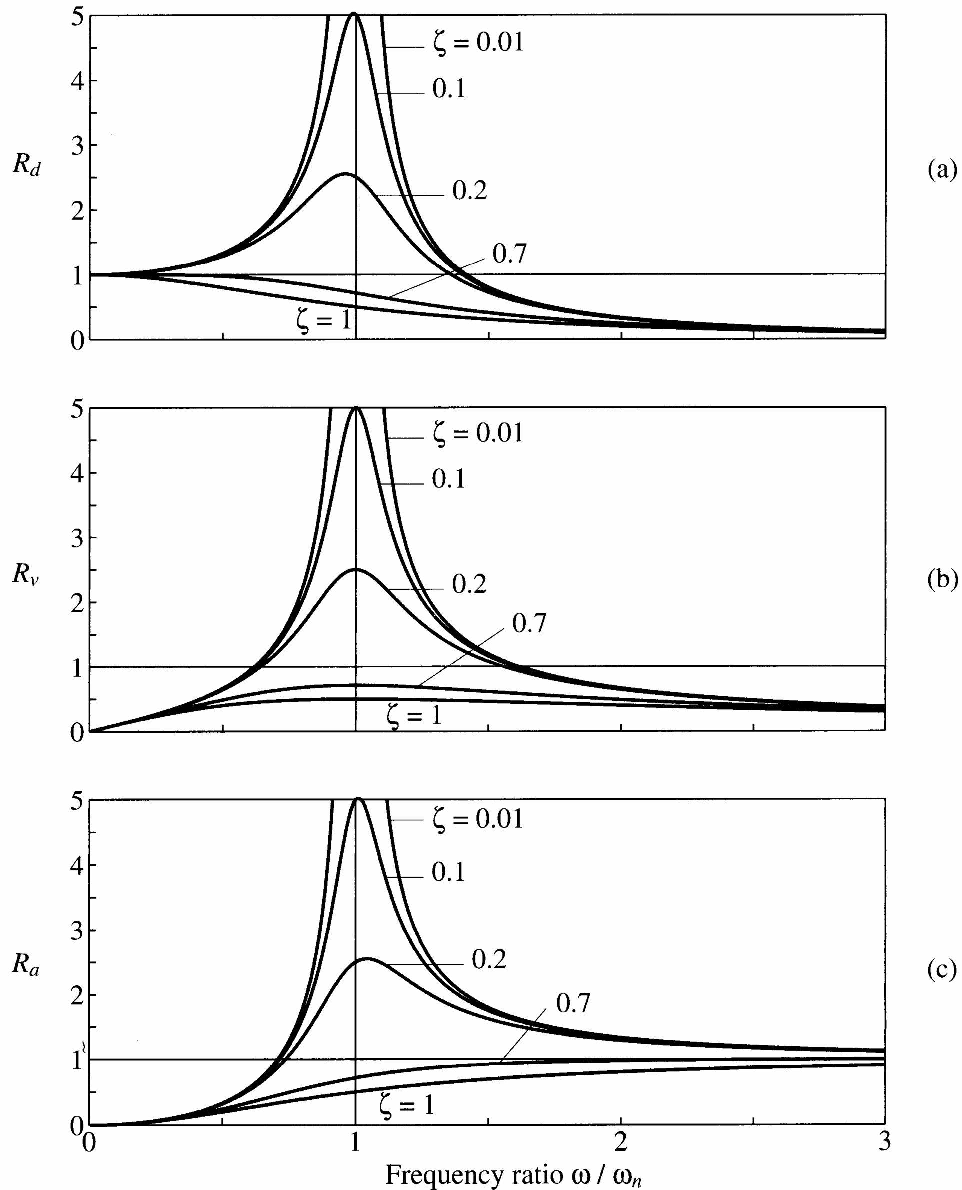


Figura 2.27. Factorii dinamic pentru deplasare, viteză şi accelerație pentru un sistem amortizat excitat de o forță armonică (Chopra, 2001).

Din ecuația (2.74) se poate observa că R_a reprezintă raportul dintre accelerația sistemului dinamic şi accelerația indusă de forța p_0 asupra masei *m*.

Factorii dinamic R_d, R_v şi R_a sunt reprezentați funcție de raportul ω/ω_n în Figura 2.27. Se pot observa următoarele:

- Factorul dinamic pentru deplasare R_d este egal cu 1 pentru $\omega/\omega_n = 0$, are valoarea maximă pentru $\omega/\omega_n < 1$ şi tinde către zero pentru $\omega/\omega_n \to \infty$
- Factorul dinamic pentru viteză R_v este egal cu 0 pentru $\omega/\omega_n = 0$, are valoarea maximă pentru $\omega/\omega_n = 1$ şi tinde către zero pentru $\omega/\omega_n \to \infty$

- Factorul dinamic pentru accelerație R_a este egal cu 0 pentru $\omega/\omega_n = 0$, are valoarea maximă pentru $\omega/\omega_n > 1$ şi tinde către 1 pentru $\omega/\omega_n \to \infty$
- Pentru $\zeta > 1/\sqrt{2}$ factorii R_d şi R_a nu înregistrează vârfuri.

Relația simplă între cei trei factori dinamici:

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \tag{2.76}$$

permite reprezentarea celor trei factori pe un singur grafic logaritmic (vezi Figura 2.28). Astfel, relația $R_d - \omega/\omega_n$ este reprezentată în mod similar cu Figura 2.27b, dar folosind o scară logaritmică. Valorile R_d şi R_a pot fi determinate de pe scările logaritmice diagonale, diferite de scara verticală pentru R_v. Această reprezentare compactă permite înlocuirea celor trei grafice din Figura 2.27 cu unul singur (Figura 2.28).

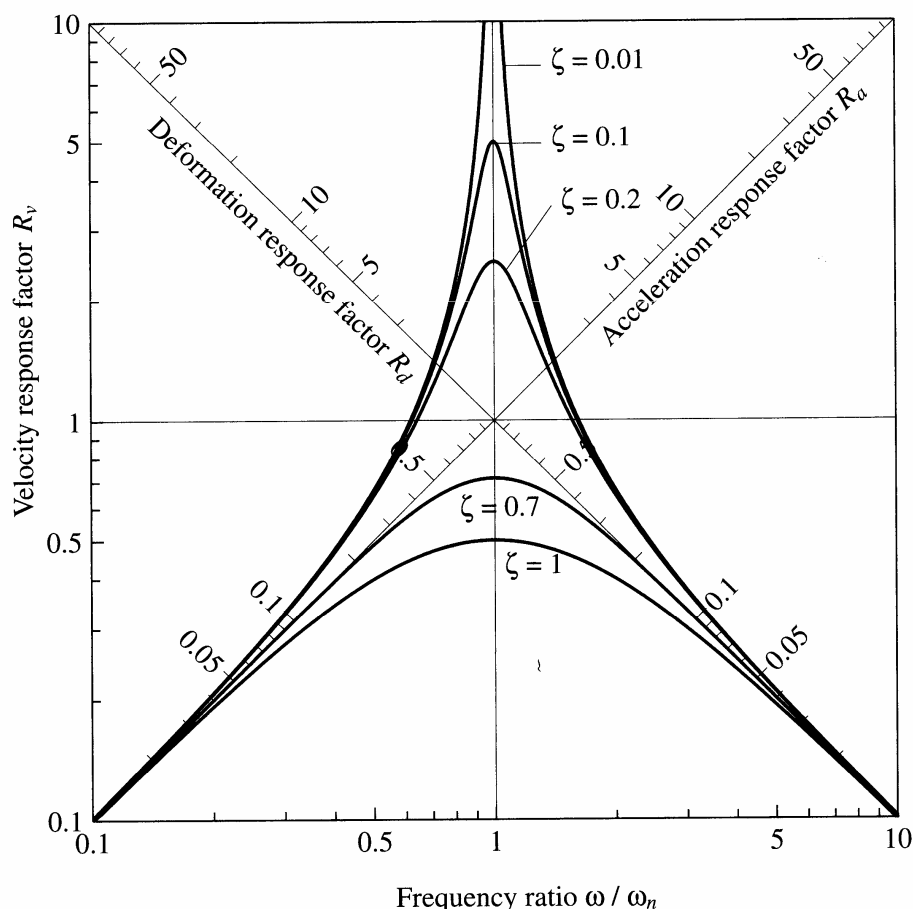


Figura 2.28. Reprezentare folosind un grafic combinat cu patru scări logaritmice a factorilor dinamici pentru deplasare, viteză şi accelerație pentru un sistem amortizat excitat de o forță armonică (Chopra, 2001).

Răspunsul la rezonanță

Frecvența rezonantă este definită ca şi frecvența la care se înregistrează amplitudinea maximă a răspunsului în termeni de deplasare, viteză sau accelerație. După cum se poate observa din Figura 2.27 valorile maxime ale deplasării, vitezei şi accelerației se înregistrează la valori puțin diferite ale pulsației. Frecvențele (sau pulsațiile) de rezonanță pot fi determinate derivând expresiile R_d, R_v şi R_a în raport cu ω/ω_n şi egalându-le cu zero. Pentru $\zeta < 1/\sqrt{2}$ acestea sunt:

- pulsația rezonantă pentru deplasare: $\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$
- pulsația rezonantă pentru viteză: ω_n

- pulsația rezonantă pentru accelerație: $\omega_n / \sqrt{1-2\zeta^2}$

Pentru un sistem neamortizat cele trei pulsații rezonante sunt identice şi sunt egale cu pulsația proprie de vibrație a sistemului ω_n. De notat faptul că pulsațiile rezonante pentru un sistem amortizat sunt diferite de pulsația de vibrații amortizate ω_D. Totuşi, pentru valori mici ale amortizării ($\zeta < 20\%$), diferențele între pulsația rezonantă, cea proprie şi cea amortizată sunt minore. Valoarea factorilor dinamici corespunzător pulsațiilor rezonante ale acestora sunt:

$$R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad R_v = \frac{1}{2\zeta} \qquad R_a = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.77}$$

Lățimea de bandă la semiputere

Lățimea de bandă la semiputere este diferența dintre valorile pulsațiilor de cele două părți ale pulsației rezonante $(\omega_b - \omega_a)$ pentru care factorul dinamic pentru deplasări este de $1/\sqrt{2}$ ori mai mic decât valoarea acestuia la rezonanță. Acest concept este exemplificat în Figura 2.29.

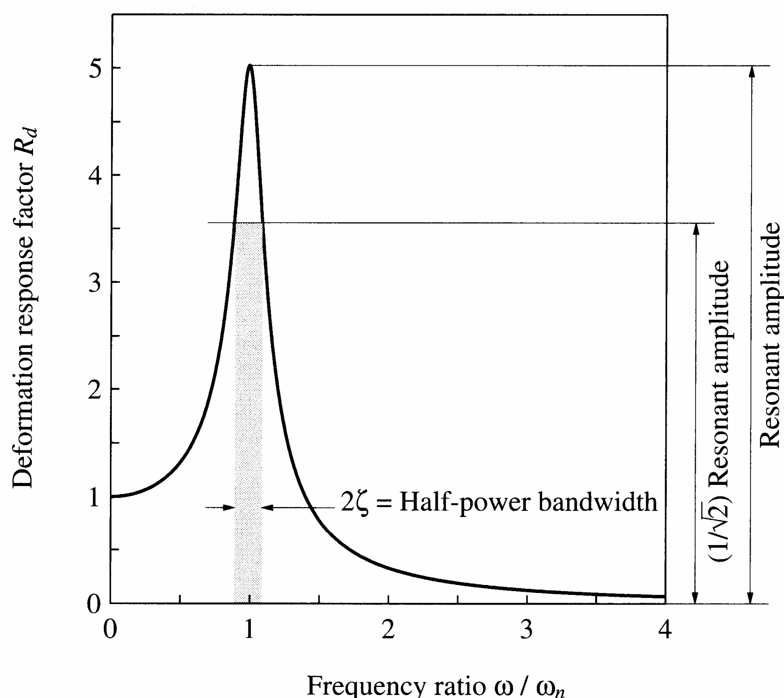


Figura 2.29. Definiția lățimii de bandă la semiputere (Chopra, 2001).

Pentru valori mici ale lui ζ este adevărată următoarea relație:

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} = 2\zeta \tag{2.78}$$

relație care poate fi reformulată ca şi:

$$\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} \quad \text{sau} \quad \zeta = \frac{f_b - f_a}{2f_n} \tag{2.79}$$

unde $f = \omega/2\pi$ este frecvența de vibrație. Acest rezultat permite evaluarea amortizării unei structuri pe baza unor încercări de vibrații forțate.

2.3.3. Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe arbitrare

Răspunsul sub acțiunea unui impuls unitar

O **forță de tip impuls** este o forță care are o valoare mare şi acționează pentru o perioadă foarte scurtă. În Figura 2.30a este reprezentată o forță $p(t)=1/\varepsilon$ de durată ε şi care începe la timpul $t=\tau$. Pentru valoarea $\varepsilon \to 0$ forța tinde către ∞, dar **mărimea impulsului forței**, definit ca şi integrala funcției *p(t)* rămâne egală cu unitatea. O astfel de forță pentru cazul $\varepsilon \to 0$ se numeşte un impuls unitar.

Conform legii a 2-a a lui Newton, dacă o forță *p* acționează asupra unei mase *m,* variația cantității de mişcare (sau a impulsului punctului material) este egală cu forța aplicată:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{u})=p \tag{2.80}$$

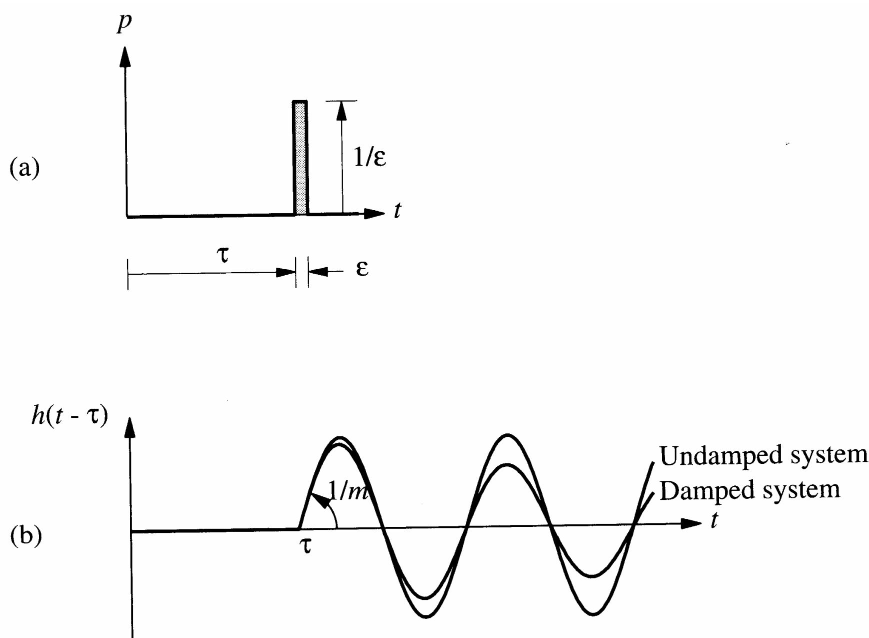


Figura 2.30. Un impuls unitar (a) şi răspunsul sub acțiunea unui impuls unitar (b), Chopra, 2001.

Pentru o masă constantă această ecuație devine:

$$m\ddot{u}=p \tag{2.81}$$

Integrând ambele părți în raport cu timpul obținem:

$$\int_{t_1}^{t_2} p\,dt = m(\dot{u}_2-\dot{u}_1)=m\Delta\dot{u} \tag{2.82}$$

Integrala din partea stângă a ecuației reprezintă mărimea impulsului forței, iar produsul dintre masă şi viteză este cantitatea de mişcare (impulsul punctului material). Astfel, ecuația (2.82) arată că mărimea impulsului este egală cu variația cantității de mişcare.

Acest rezultat este valabil şi pentru sisteme cu un singur grad de liberate dinamică, atunci când forța acționează pe o durată infinitezimală, deoarece nici rigiditatea şi nici amortizarea nu au timp să fie implicate în mişcare. De aceea, folosind ecuația (2.82), un impuls unitar la timpul $t=\tau$ va imprimă masei *m* viteza:

$$\dot{u}(\tau)=\frac{1}{m} \tag{2.83}$$

iar deplasarea este egală cu zero până în momentul acționării impulsului:

$$u(\tau)=0 \tag{2.84}$$

Un impuls unitar va genera vibrații libere unui sistem SGLD din cauza vitezei şi deplasării inițiale date de relațiile (2.83) şi (2.84). Înlocuind cele două relații în ecuația (2.18) obținem răspunsul unui sistem neamortizat sub acțiunea unui impuls unitar:

$$h(t-\tau)\equiv u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\sin\left[\omega_n(t-\tau)\right] \qquad t\geq\tau \tag{2.85}$$

În mod similar pe baza ecuației (2.29) obținem răspunsul unui sistem amortizat sub acțiunea unui impuls unitar:

$$h(t-\tau)\equiv u(t)=\frac{1}{m\omega_D}e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\left[\omega_D(t-\tau)\right] \qquad t\geq\tau \tag{2.86}$$

Aceste funcții de răspuns la acțiunea unui impuls unitar, notate cu *h(t-τ)* sunt arătate în Figura 2.30b.

Răspunsul sub acțiunea unei forțe arbitrare

O forță *p(t)* care variază arbitrar cu timpul poate fi reprezentată ca şi o serie de impulsuri infinitezimale (vezi Figura 2.31). Răspunsul unui sistem liniar elastic dinamic sub acțiunea unui impuls de mărime *p(τ)dτ* aplicat la momentul de timp τ este egal cu produsul dintre mărimea impulsului şi răspunsul unui impuls unitar:

$$du(t)=\left[p(\tau)d\tau\right]h(t-\tau) \qquad t>\tau \tag{2.87}$$

iar răspunsul sistemului la timpul *t* este egal cu suma răspunsurilor tuturor impulsurilor până în acel moment (vezi Figura 2.31):

$$u(t)=\int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.88}$$

rezultat care este cunoscut sub denumirea de **integrală de convoluție** şi este aplicabilă oricărui sistem dinamic.

Înlocuind relația (2.86) în ecuația (2.88) obținem **integrala Duhamel** pentru un sistem SGLD amortizat:

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau \tag{2.89}$$

şi pentru un sistem amortizat devine:

$$u(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau \tag{2.90}$$

Ecuația este valabilă numai pentru condiții inițiale "de repaos": $u(0)=0$ şi $\dot{u}(0)=0$. Integrala Duhamel reprezintă o metodă generală de determinare a răspunsului dinamic sub acțiunea unei forțe arbitrare *p(t)*. Deoarece integrala de convoluție se bazează pe principiul suprapunerii efectelor, integrala Duhamel este valabilă numai pentru sisteme liniar elastice. Dacă forța *p(t)* este este o funcție simplă integrala se poate evalua analitic. Pentru încărcări dinamice complicate sau care sunt definite numeric la valori de timp discrete, integrala Duhamel poate fi integrată numeric.

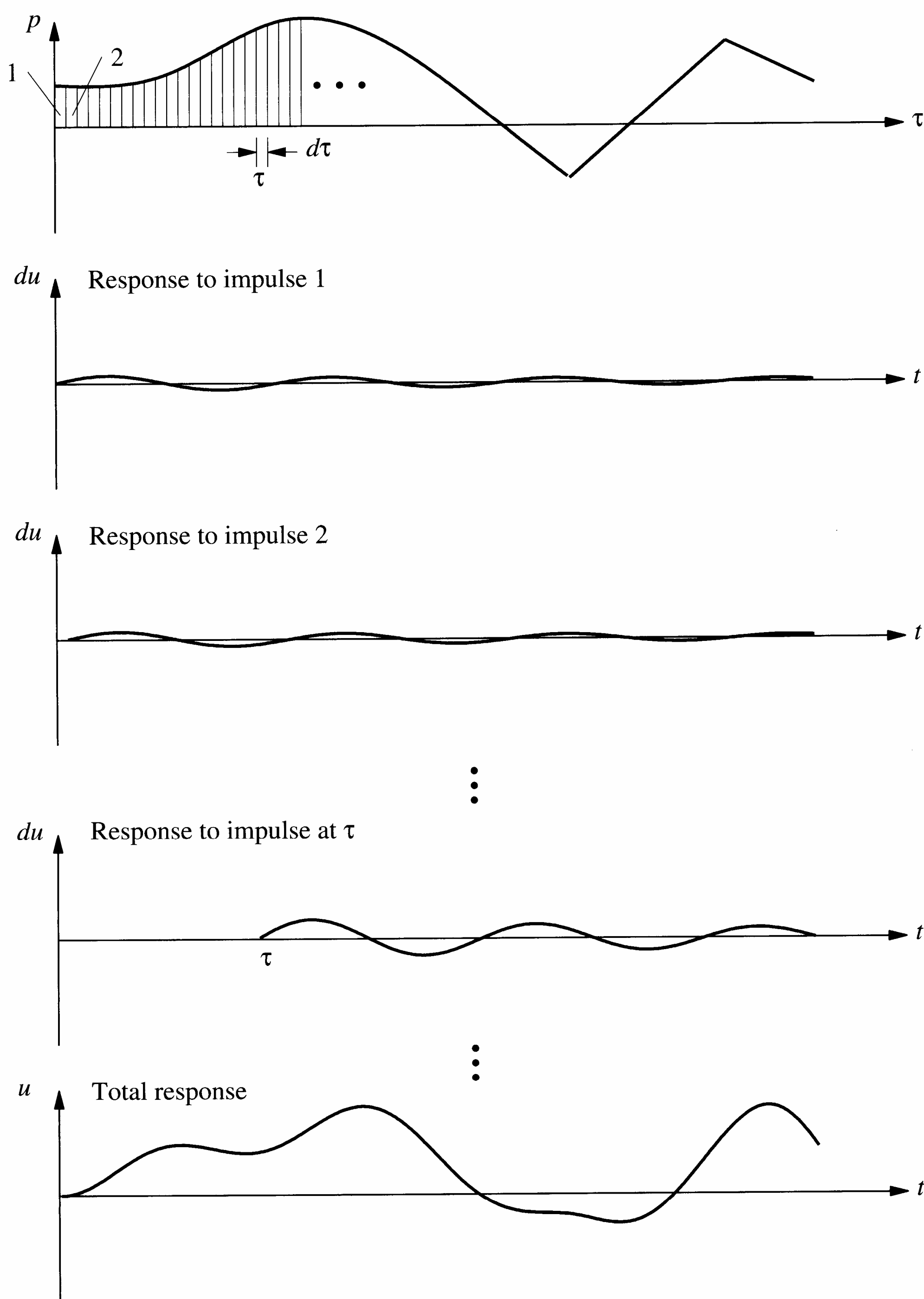


Figura 2.31. Demonstrarea grafică a integralei de convoluție (Chopra, 2001).

2.3.4. Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip treaptă şi rampă

Spre deosebire de forțele perturbatoare armonice, răspunsul dinamic sub acțiunea unor forțe de tip treaptă, rampă şi impuls este influențat într-o măsură foarte mică de amortizarea sistemului. Din această cauză analiza răspunsului dinamic în aceste din urmă cazuri va fi demonstrat în principal pe baza vibrațiilor neamortizate.

Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip treaptă

O **forță de tip treaptă** este exemplificată în Figura 2.32a şi este definită de următoarea relație:

$$p(t) = p_0 \qquad t \geq 0 \tag{2.91}$$

Folosind integrala Duhamel (2.90) pentru rezolvarea ecuației de mişcare a unui sistem SGLD neamortizat se obține:

$$u(t) = (u_{st})_0 (1 - \cos \omega_n t) = \frac{p_0}{k}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{T_n}\right) \tag{2.92}$$

unde $(u_{st})_0 = p_0/k$ este deformația statică sub acțiunea forței p_0.

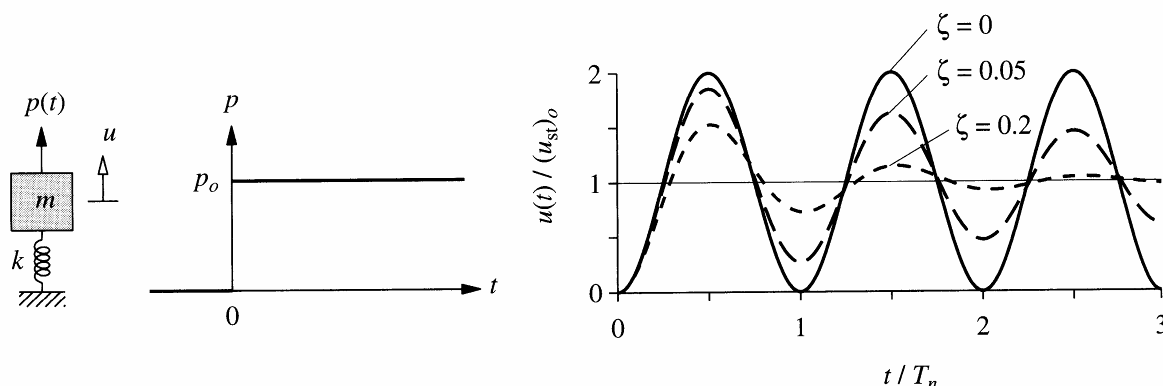


Figura 2.32. Un sistem SGLD (a), forța de tip treaptă (b), răspunsul dinamic (c), Chopra, 2001.

Deplasarea normalizată $u(t)/(u_{st})_0$ în raport cu timpul normalizat t/T_n este reprezentată în Figura 2.32c. Se poate observa că sistemul oscilează în jurul unei noi poziții de echilibru, deplasată cu $(u_{st})_0$ față de poziția inițială $u = 0$. Deplasarea maximă poate fi obținută egalând derivata ecuației (2.92) în raport cu timpul cu zero, ceea ce conduce la $\omega_n \sin \omega_n t = 0$. Această ecuație are soluția:

$$\omega_n t_0 = j\pi \quad \text{sau} \quad t_0 = \frac{j}{2} T_n \tag{2.93}$$

Deplasarea maximă corespunde unor valori impare ale lui *j*, în timp ce valorile pare conduc la deplasările minime. Amplitudinea deplasării se obține din ecuația (2.92) în care se înlocuiesc valorile t_0 din relația (2.93):

$$u_0 = 2(u_{st})_0 \tag{2.94}$$

rezultat care indică faptul că o forță de tip treaptă aplicată dinamic produce o deplasarea care este de două ori mai mare decât deplasarea datorată aceleiaşi forțe aplicată static.

Răspunsul unui sistem amortizat sub acțiunea forței de tip treaptă poate fi obținut substituind relația (2.91) în ecuația (2.89) şi evaluând integrala Duhamel, ceea ce conduce la:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D t\right)\right] \tag{2.95}$$

Răspunsul dinamic al sistemului amortizat este reprezentat în Figura 2.32 cu linii întrerupte pentru două valori ale fracțiunii din amortizarea critică. Efectul amortizării este o depăşire mai mică a mişcării față de poziția statică şi o descreştere în timp a vibrațiilor. Valoarea amortizării controlează mărimea depăşirii şi rata cu care scad amplitudinile vibrațiilor. După un timp suficient de mare, vibrațiile se opresc, fapt care reprezintă stadiul staționar.

Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip rampă

O **forță de tip rampă** este exemplificată în Figura 2.33a şi este definită de următoarea relație:

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_r} \qquad t \geq 0 \tag{2.96}$$

Folosind integrala Duhamel (2.90) pentru rezolvarea ecuației de mişcare a unui sistem SGLD neamortizat se obține:

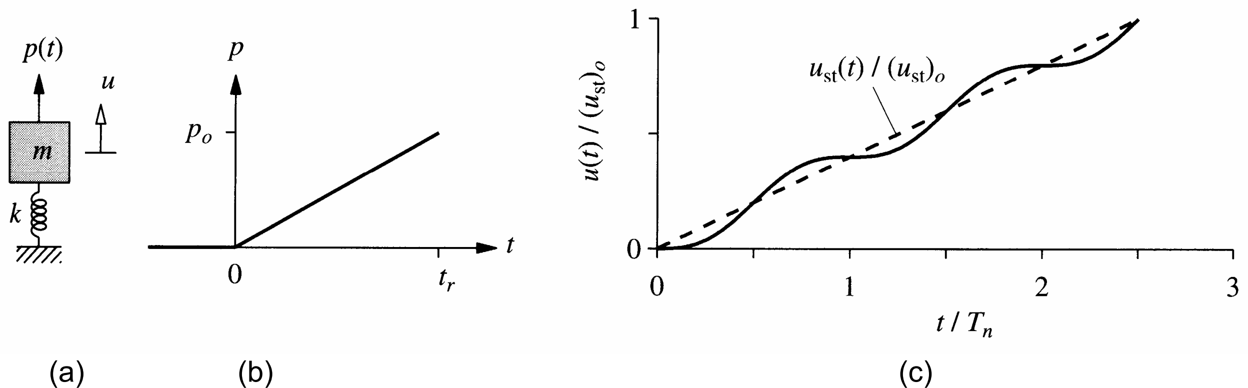
$$u(t)=\left(u_{st}\right)_0\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_r}\right)=\left(u_{st}\right)_0\left(\frac{t}{T_n}\frac{T_n}{t_r}-\frac{\sin 2\pi t/T_n}{2\pi t_r/T_n}\right) \tag{2.97}$$

unde $\left(u_{st}\right)_0=p_0/k$ este deformația statică sub acțiunea forței p_0.

Ecuația (2.97) este reprezentată grafic în Figura 2.33c pentru t_r/T_n=2.5, împreună cu deformația statică în momentul t:

$$u_{st}(t)=\frac{p(t)}{k}=\left(u_{st}\right)_0\frac{t}{t_r} \tag{2.98}$$

Se poate observa că sistemul dinamic oscilează cu perioada T_n față de poziția de echilibru static.



(a) (b) (c)

Figura 2.33. Un sistem SGLD (a), forța de tip rampă (b), răspunsul dinamic şi cel static (c), Chopra, 2001.

Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip treaptă cu creştere finită

Deoarece în realitate o forță nu poate fi aplicată instantaneu, este de interes analiza răspunsului dinamic al unei forțe care are o creştere finită t_r, dar rămâne constantă după atingerea acestei valori. O astfel de forță este exemplificată în Figura 2.34a:

$$p(t)=\begin{cases}p_0\left(t/t_r\right) & 0\le t\le t_r\\ p_0 & t\ge t_r\end{cases} \tag{2.99}$$

Această excitație are două faze: faza de rampă şi faza constantă.

Expresia deplasării în faza de rampă este cea identică relației (2.97):

$$u(t)=\left(u_{st}\right)_0\left(\frac{t}{t_r}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_r}\right) \qquad t\le t_r \tag{2.100}$$

iar răspunsul în faza constantă poate fi determinat înlocuind relația (2.99) în ecuația (2.90):

$$u(t)=\left(u_{st}\right)_0\left\{1-\frac{1}{\omega_n t_r}\left[\sin\omega_n t-\sin\omega_n\left(t-t_r\right)\right]\right\} \qquad t\ge t_r \tag{2.101}$$

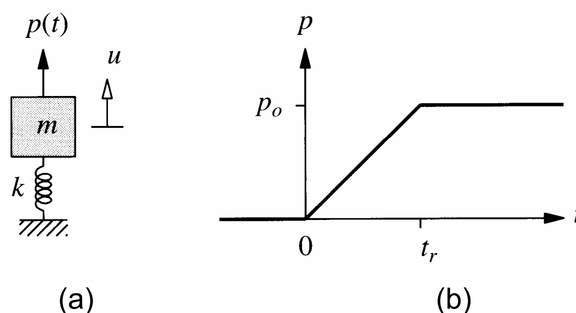


Figura 2.34. Un sistem SGLD (a), forța de tip treaptă cu creştere finită (b), Chopra, 2001.

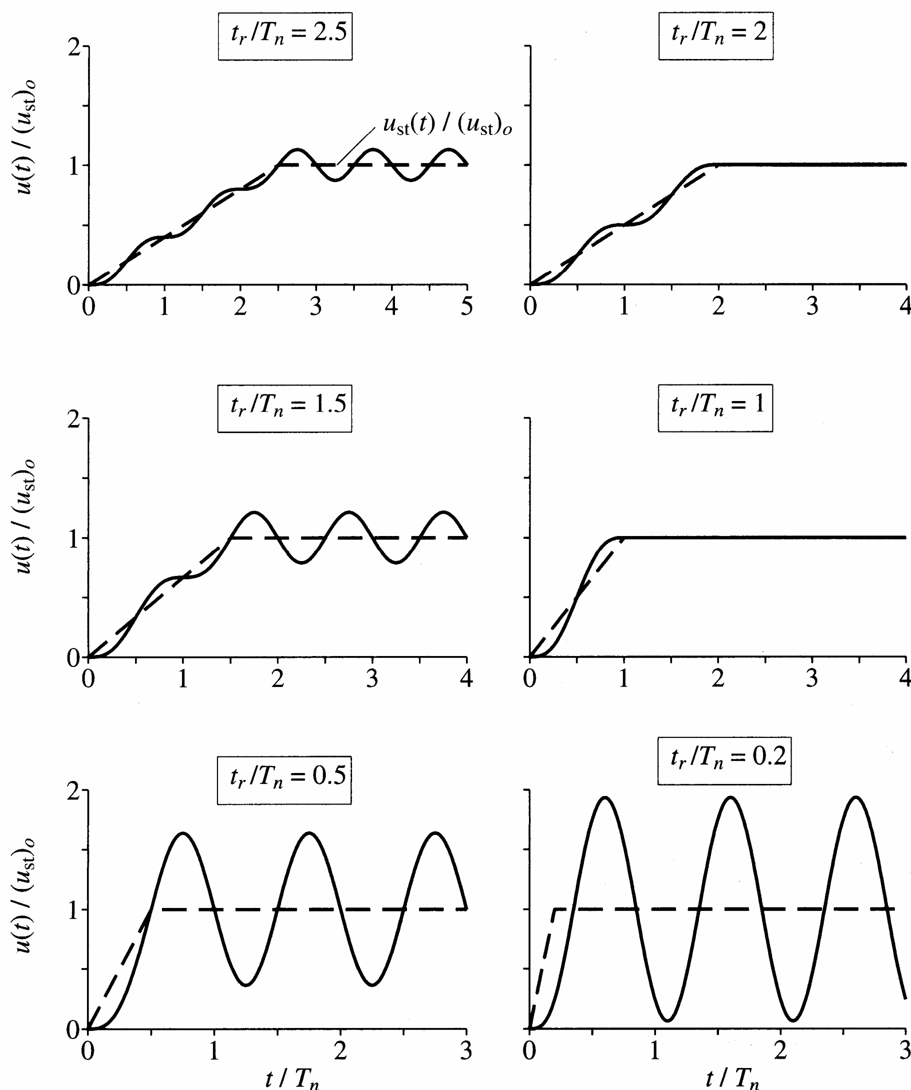


Figura 2.35. Răspunsul dinamic şi cel static al unui sistem SGLD sub acțiunea unei forțe tip treaptă cu creştere finită (Chopra, 2001).

Deplasarea normalizată $u(t)/(u_{st})_0$ este o funcție de timpul normalizat t/T_n, deoarece $\omega_n t = 2\pi(t/T_n)$. Această funcție depinde doar raportul t_r/T_n, deoarece $\omega_n t_r = 2\pi(t_r/T_n)$ şi nu separat de t_r şi T_n. Această ecuație este reprezentată în Figura 2.35 pentru câteva valori ale raportului t_r/T_n dintre timpul de creştere a forței şi perioada proprie a sistemului, împreună cu răspunsul static $u_{st}(t) = p(t)/k$. Aceste rezultate permit următoarele observații:

- În timpul creşterii forței (faza de rampă) sistemul oscilează față de poziția de echilibru static cu perioada proprie de vibrație T_n

- Pentru zona de forță constantă (faza constantă) sistemul se comportă similar, oscilând față de poziția de echilibru static cu perioada proprie de vibrație T_n
- Dacă viteza este egală cu zero la finalul fazei de rampă $\dot{u}(t_r)=0$, sistemul nu oscilează în timpul fazei de forță constantă
- Pentru valori mici ale raportului t_r/T_n (timpi de creştere a forței mici) răspunsul este similar cu cel datorat unei forțe de tip treaptă (vezi Figura 2.34c)
- Pentru valori mari ale raportului t_r/T_n răspunsul dinamic este apropiat de poziția de echilibru static, ceea ce semnifică un efect dinamic scăzut.

Deplasarea atinge valoarea maximă în timpul fazei constante de aplicare a forței, iar coeficientul dinamic pentru deplasare are expresia:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 1 - \frac{|\sin(\pi t_r/T_n)|}{\pi t_r/T_n} \tag{2.102}$$

Coeficientul dinamic pentru deplasare atinge valoarea maximă R_d depinde doar de raportul t_r/T_n dintre timpul de creştere a forței şi perioada proprie a sistemului. Reprezentarea grafică a acestei relații (vezi Figura 2.36) se numeşte **spectru de răspuns** al unei forțe de tip treaptă cu creştere finită.

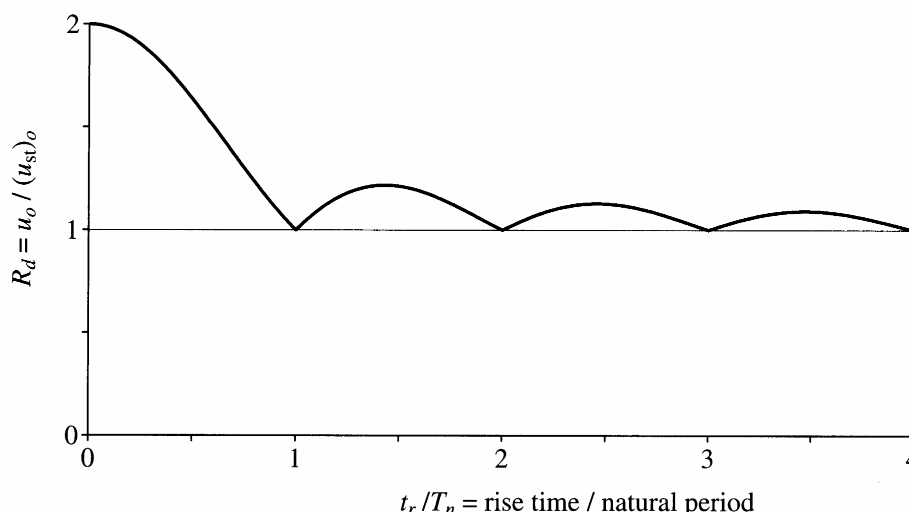


Figura 2.36. Spectrul de răspuns pentru forța de tip treaptă cu creştere finită (Chopra, 2001).

Spectrul de răspuns caracterizează complet amplitudinea răspunsului dinamic pentru orice sistem SGLD fără amortizare sub acțiunea unei forțe de tip treaptă cu creştere finită. Pe baza spectrului de răspuns din Figura 2.36 pot fi făcute următoarele observații:

- Dacă $t_r<T_n/4$ (un timp de creştere redus), $u_0 \simeq 2(u_{st})_0$, adică sistemul "simte" forța perturbatoare ca şi o forță aplicată instantaneu (de tip treaptă).
- Dacă $t_r>3T_n$ (un timp de creştere mare), $u_0 \simeq (u_{st})_0$, adică sistemul "simte" forța perturbatoare ca şi o forță aplicată static.
- Dacă t_r/T_n=1, 2, 3, …, $u_0 = (u_{st})_0$, deoarece $\dot{u}(t_r)=0$ iar sistemul nu oscilează pe durata fazei constante de încărcare (vezi Figura 2.35).